المملكة المغربية

ROYAUME DU MAROC



Ministère de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche
Scientifique et de la Formation des Cadres

Présidence du Concours National Commun
École Mohammadia d'Ingénieurs

CONCOURS NATIONAL COMMUN
d'admission dans les Établissements de Formation d'Ingénieurs
et Établissements Assimilés

Session 2014

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Filière **MP**

Durée **4** heures

Cette épreuve comporte 03 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de calculatrice *n'est pas autorisé*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP,
comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit.

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet de cette épreuve est composé d'un exercice et d'un problème indépendants entre eux.

Exercice

Soit n un entier $\geqslant 2$; si $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels, à n lignes et p colonnes. Si $p = n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est noté simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est l'algèbre des matrices carrées réelles d'ordre n. Si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^tM$ désigne la matrice transposée de M.

On rappelle ce qui suit :
– Si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^tM \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et ${}^t({}^tM) = M$.
– Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique si ${}^tM = M$ (M coïncide avec sa matrice transposée).
– Une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite positive si ${}^tXMX \geqslant 0$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
– Le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est noté $<,>$; il est défini par $(X,Y) \mapsto <X,Y> = {}^tXY$.

Dans tout l'exercice, $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne une matrice **symétrique et positive.**

1. Montrer que les valeurs propres de A sont positives.

2. Montrer qu'il existe une matrice $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tMM$. On pourra réduire convenablement la matrice A.

Dans la suite de l'exercice, une telle matrice M est choisie ; on note $C_1, ..., C_n$ ses colonnes.

3. **(a)** Montrer que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $AX = 0$ si, et seulement si, $MX = 0$.
(b) En déduire que les matrices A et M ont le même rang.

4. **(a)** Montrer que, pour tout couple (i,i) d'éléments de $\{1,...,n\}$, $a_{i,j} = <C_i\,, C_j> = {}^tC_iC_j$.
(b) En déduire que, pour tout couple (i,i) d'éléments de $\{1,...,n\}$, $a_{i,j}^2 \leqslant a_{i,i}\, a_{j,j}$.

5. Montrer que la matrice A est de rang 1 si, et seulement si, $a_{i,j}^2 = a_{i,i}\, a_{j,j}$ pour tout couple (i,j) d'éléments de $\{1,...,n\}$.

6. Dans cette question, on suppose que les coefficients de A sont tous **non nuls** et on considère la matrice $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont définis par $b_{i,j} = \frac{1}{a_{i,j}}$, pour tout $(i,j) \in \{1,...,n\}^2$. Il est clair que B est une matrice **symétrique** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
(a) Montrer que si la matrice B est positive alors A est de rang 1.
(b) On suppose ici que la matrice A est de rang 1. Montrer qu'il existe $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$ tel que $A = U\,{}^tU$ puis en déduire que la matrice B est positive.

Problème
Sous-espaces de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formés de matrices diagonalisables

Dans ce problème, $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ désigne l'algèbre des matrices carrée d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est dite scalaire si elle est de la forme $A = \lambda I_2$, où $\lambda \in \mathbb{K}$ et I_2 la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Les trois parties du problème s'enchaînent entre elles. Dans la première partie, on étudie une caractérisation des homothéties et on applique le résultat obtenu pour déterminer le commutant d'un endomorphisme ou d'une matrice en dimension 2 ; la seconde partie porte sur la diagonalisation simultanée de matrices et aboutit à l'étude, pour deux matrices diagonalisables A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, du lien entre le fait d'être commutables et le fait que $A + \lambda B$ soit diagonalisable pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$. La dernière partie est consacrée à l'étude des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ formés de matrices diagonalisables.

1ère Partie
Caractérisation des homothéties en dimension 2
Application au commutant

E désigne un espace vectoriel de dimension 2 et $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E. Si $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $\mathcal{C}(f)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f : $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E)\,;\, fg = gf\}$.

1.1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

1.1.1. Montrer que, pour tout $x \in E \backslash \{0_E\}$, il existe un unique $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.

1.1.2. Soit (e_1, e_2) une base de E ; montrer que $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}$.

1.1.3. On pose $\lambda = \lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}$. Montrer que $f = \lambda\, id_E$ (homothétie de rapport λ).

1.2. Soit f un endomorphisme de E.

1.2.1. Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

1.2.2. Déterminer $\mathcal{C}(f)$ si f est une homothétie.

1.3. Soit f un endomorphisme de E qui n'est pas une homothétie.

1.3.1. Justifier qu'il existe $e \in E$ tel que la famille $(e, f(e))$ soit une base de E.

1.3.2. Si $g \in \mathcal{L}(E)$, justifier qu'il existe un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ tel que $g(e) = \alpha\, e + \beta f(e)$ et montrer que $g \in \mathcal{C}(f)$ si, et seulement si, $g = \alpha\, id_E + \beta f$.

1.3.3. Préciser $\mathcal{C}(f)$; quelle est sa dimension ?

1.4. Traduction matricielle : Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$; on pose $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})\,;\, AM = MA\}$.

1.4.1. Si A est une matrice scalaire, déterminer $\mathcal{C}(A)$.

1.4.2. Si A n'est pas une matrice scalaire, montrer que $\mathcal{C}(A) = \text{Vect}(I_2, A)$; quelle est sa dimension ?

2ème Partie
Diagonalisation simultanée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

2.1. Pour quels triplets $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$?

2.2. Donner alors un exemple de matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ qui n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

2.3. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$; montrer que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ si, et seulement si, la matrice $A + \lambda\, I_2$ l'est aussi.

2.4. Soient A et B deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$.

2.4.1. Montrer que les matrices A et B sont simultanément diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \text{GL}_2(\mathbb{K})$ telle que les matrices PAP^{-1} et PBP^{-1} soient diagonales. On pourra remarquer que $B \in \mathcal{C}(A)$ et traiter à part le cas où A est une matrice scalaire.

2.4.2. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, la matrice $A + \lambda\, B$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

2.5. Familles de matrices diagonalisables

2.5.1. Soient $(A_i)_{i \in I}$ une famille de matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On suppose en outre que ces matrices commutent deux à deux : $\forall (i, j) \in I^2$, $A_i A_j = A_j A_i$.

Montrer que les matrices A_i, $i \in I$, sont simultanément diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \text{GL}_2(\mathbb{K})$ telle que, pour tout $i \in I$, la matrice PA_iP^{-1} soit diagonale. On pourra traiter à part le cas où toutes ces matrices sont scalaires.

2.5.2. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $A_1, ..., A_m$ sont des matrices involutives de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ qui commutent deux à deux, alors $m \leqslant 4$. On rappelle que $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est dite involutive si $M^2 = I_2$.

2.6. On considère les matrices $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & d \end{pmatrix}$, où a et d sont des nombres réels.

2.6.1. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice $J + \lambda\, K$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2.6.2. Est-ce que les matrices J et K commutent entre elles ?

2.7. On se place dans le cas complexe et on se donne deux matrices A et B diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, la matrice $A + \lambda\, B$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On suppose que B n'est pas une **matrice scalaire.**

2.7.1. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et deux complexes *distincts* α et β tels que $B = P\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}P^{-1}$.

Dans la suite, on pose $\gamma = \beta - \alpha$ et $P^{-1}AP = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on note χ_λ le polynôme caractéristique de la matrice $A + \lambda(B - \alpha I_2)$ et δ_λ le discriminant de χ_λ.

2.7.2. Calculer δ_λ en fonction de a, b, c, d, γ et λ, et montrer que c'est un polynôme de degré 2 en λ.

2.7.3. En déduire qu'il existe $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tel que $A + \lambda_0(B - \alpha I_2)$ soit une matrice scalaire.

2.7.4. Conclure que $AB = BA$.

3ème Partie
Étude des sous-espaces de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ formés de matrices diagonalisables

3.1. Soit $\mathscr{F}$ un sous-espace *non nul* de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ formé de matrices **diagonalisables**.

3.1.1. Si $\mathscr{F}$ contient une matrice A qui n'est pas scalaire, montrer que $\mathscr{F} \subset \mathcal{C}(A)$ puis conclure que $\mathscr{F} = \mathcal{C}(A)$ ou $\mathscr{F} = \mathbb{C}.A = \{\lambda A\,;\ \lambda \in \mathbb{C}\}$. Préciser la dimension de $\mathscr{F}$ dans chacun de ces deux cas.

3.1.2. Envisager le cas restant en précisant la dimension de $\mathscr{F}$.

3.2. Donner un exemple de sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, formé de matrices diagonalisables, et qui soient de dimension 1 (resp. 2).

Dans la suite du problème, on s'intéresse aux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, formé de matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques.

Si $\mathscr{M}$ est un sous-espasce vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, alors $P\mathscr{M}P^{-1}$ l'ensemble défini par

$$P\mathscr{M}P^{-1} := \{PMP^{-1}\,;\ M \in \mathscr{M}\}.$$

3.3. Montrer que si $\mathscr{M}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, alors $P\mathscr{M}P^{-1}$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, de même dimension que $\mathscr{M}$.

3.4. Montrer que $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formé de matrices diagonalisables.

3.5. Justifier que si $R \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ alors $R\mathscr{S}_2(\mathbb{R})R^{-1}$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formé de matrices diagonalisables.

3.6. Soit $\mathscr{F}$ un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formé de matrices diagonalisables ; on se propose de montrer que $\mathscr{F}$ est **conjugué** à $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $\mathscr{F} = P\mathscr{S}_2(\mathbb{R})P^{-1}$.

3.6.1. Montrer que $I_2 \in \mathscr{F}$. On pourra raisonner par l'absurde.

3.6.2. Soit $A \in \mathscr{F} \setminus \mathbb{C}.I_2$; montrer qu'il existe $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $Q\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q^{-1} \in \mathscr{F}$. On pourra diagonaliser A et exploiter le fait que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Dans la suite, une telle matrice Q est choisie et on pose $\mathscr{W} = Q^{-1}\mathscr{F}Q$. Il est clair que $\mathscr{W}$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formé de matrices diagonalisables et contenant les matrices I_2 et $A_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

Soit $B \in \mathscr{W} \setminus \mathrm{Vect}(I_2, A_1)$.

3.6.3. On pose $B = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. Montrer que $\begin{pmatrix}0 & b\\ c & 0\end{pmatrix} \in \mathscr{W} \setminus \mathrm{Vect}(I_2, A_1)$ et que $bc > 0$.

3.6.4. En déduire qu'il existe $w > 0$ tel que $B_1 = \begin{pmatrix}0 & w^2\\ 1 & 0\end{pmatrix} \in \mathscr{W}$ et justifier que $\mathscr{W} = \mathrm{Vect}(I_2, A_1, B_1)$.

3.6.5. Diagonaliser la matrice B_1 et en déduire que $\mathscr{W}$ est conjugué à $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ puis conclure.

3.7. Montrer que tout sous-espace vectoriel $\mathscr{V}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, formé de matrices diagonalisables, est conjugué à un sous-espace vectoriel de $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$. Si $\dim \mathscr{V} = 2$, on pourra distinguer les cas $I_2 \in \mathscr{V}$ et $I_2 \notin \mathscr{V}$.

3.8. Préciser les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formés de matrices orthogonalement diagonalisables.

FIN DE L'ÉPREUVE